

بسمه تعالی

یادآوری ۱. فرض کنید G یک گروه آبدلی و X یک زیر مجموعه از G باشد. گوییم G یک گروه آبدلی آزاد روی مجموعه X است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:
 - هر عضو x از G را بتوان به صورت $x = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$ نوشت که در آن k_i ها اعداد صحیح و x_i ها اعضای X هستند.
 - اگر $k_1x_1 + \dots + k_nx_n = 0$ که x_i ها اعضای متمایزی از X هستند انگاه $k_1 = \dots = k_n = 0$.
 در این حالت X را یک پایه برای G گوییم و کاردینال X را رتبه گروه آبدلی آزاد G می نامیم.

مثال ۱. مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} یک گروه آبدلی آزاد و $X = \{1\}$ یک پایه از آن است.

مثال ۲. اگر

$$G = \mathbb{Z}^n := \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$$

و

$$e_i := (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

آن گاه G یک گروه آبدلی آزاد و

$$X = \{e_1, \dots, e_n\}$$

یک پایه از آن است.

مثال ۳. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی دلخواه و برای $x \in X$ ، $\mathbb{Z}x$ یک نسخه از \mathbb{Z} باشد. به طور نمادین $\mathbb{Z}x := \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$. فرض کنید G جمع مستقیم گروه های $\mathbb{Z}x$ باشد. در واقع هر عضو G به طور نمادین به صورت

$$\sum_{x \in X} n_x x$$

نمایش داده می شود که در آن n_x ها اعداد صحیح هستند و فقط تعداد متناهی از آن ها غیر صفر است. دو عضو $\sum_{x \in X} n_x x$ و $\sum_{x \in X} n'_x x$ به شکل

$$\sum_{x \in X} n_x x + \sum_{x \in X} n'_x x = \sum_{x \in X} (n_x + n'_x) x$$

با هم جمع می شوند. با این عمل G یک گروه آبدلی است که عضو خنثی آن $\sum_{x \in X} 0x$ است و $\sum_{x \in X} -n_x x$ عضو قرینه $\sum_{x \in X} n_x x$ می باشد. با این تعریف G یک گروه آبدلی آزاد و X یک پایه از آن است.

یادآوری ۲. اگر G یک گروه و X یک زیرمجموعه از G باشد، زیرگروه تولید شده توسط X را با نماد $\langle X \rangle$ نشان میدهیم. در واقع $\langle X \rangle$ کوچکترین زیرگروه G است که مجموعه X را شامل است. به بیان دقیق ریاضی $\langle X \rangle$ اشتراک تمام زیرگروه هایی از G است که مجموعه X را شامل هستند.

تعریف. زیر مجموعه S از یک گروه آبدلی G را متقارن گوییم هرگاه

$$0 \in S -$$

$$x, y \in S \implies x \pm 2y \in S -$$

$$\langle S \rangle = G -$$

مثال ۴. $S = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid k_1 k_2 \in 2\mathbb{Z}\}$ یک زیر مجموعه متقارن از \mathbb{Z}^2 است.

سوال

فرض کنید G یک گروه آبدلی آزاد و S یک زیر مجموعه متقارن از G باشد.
 ۱- اگر رتبه G متناهی باشد (می توانیم فرض کنیم $G = \mathbb{Z}^n$) نشان دهید S یک پایه از G را شامل است.

۲- آیا سوال ۱ وقتی رتبه G دلخواه باشد درست است (ابتدا سعی کنید حالتی که رتبه G شمارای نامتناهی است را پاسخ دهید).

برای مطالعه گروه های آبدلی آزاد به کتاب جبر هانگرفورد ترجمه علی اکبر عالم زاده مراجعه کنید. همچنین می توانید از سایت زیر و منابع ان کمک بگیرید.
https://en.wikipedia.org/wiki/Free_abelian_group

توضیح

زیر مجموعه های متقارن در مطالعه فضاهای متقارن در هندسه و همچنین در مطالعه جبرهای لی با بعد نامتناهی ظاهر می شوند. سوال فوق هنگام تحقیق روی این مجموعه ها بطور طبیعی مطرح شده است.